

Уральский государственный экономический университет
ФОРМАЛИЗАЦИЯ ИНФОРМАЦИИ И Big Data

02.03.03 -Математическое обеспечение и администрирование информационных систем,
направленность (профиль) -разработка и администрирование информационных систем

<http://vikchas.ru>

Лабораторная работа 2. Тема
«Формализация информации. Структуры
данных: деревья»

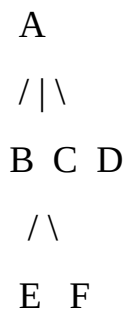
Часовских Виктор Петрович
доктор технических наук, профессор кафедры
ШИиКМ, ФГБОУ ВО «Уральский государственный
экономический университет

Екатеринбург 2026

Дерево — это иерархическая структура данных, состоящая из узлов, связанных между собой отношениями «родитель — потомок».

Дерево похоже на перевёрнутое настоящее дерево: сверху находится главный элемент — **корень**, от него отходят ветви к другим элементам.

Пример дерева:



Здесь:

- A — корень дерева;
- B, C, D — потомки узла A;
- E, F — потомки узла C;
- A — родитель для B, C, D;
- C — родитель для E, F.

Главная особенность дерева — отсутствие циклов. Это значит, что нельзя двигаться по связям и вернуться в тот же узел.

Основные термины

При изучении деревьев используются следующие понятия.

Узел — элемент дерева, содержащий данные.

Корень — главный узел дерева, не имеющий родителя.

Ребро — связь между двумя узлами.

Родитель — узел, из которого выходит связь к другому узлу.

Потомок — узел, который находится ниже другого узла.

Лист — узел, не имеющий потомков.

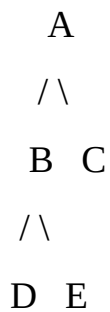
Внутренний узел — узел, который имеет хотя бы одного потомка.

Поддерево — часть дерева, которая сама является деревом.

Уровень — расстояние от корня до узла. Корень обычно находится на нулевом уровне.

Высота дерева — максимальное расстояние от корня до самого дальнего листа.

Пример:



В этом дереве:

- A — корень;
- D, E, C — листья;
- B — внутренний узел;
- высота дерева равна 2, если считать уровень корня за 0.

Свойства деревьев

Дерево обладает несколькими важными свойствами:

1. В дереве есть один корень.
2. Каждый узел, кроме корня, имеет ровно одного родителя.
3. Между корнем и любым узлом существует единственный путь.
4. В дереве нет циклов.
5. Если в дереве n узлов, то в нём $n - 1$ ребро.

Эти свойства отличают дерево от более общей структуры — графа.

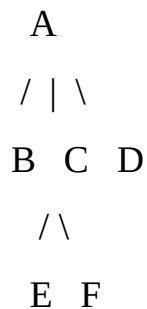
Виды деревьев

Существует много разновидностей деревьев. Наиболее важные из них используются в программировании, базах данных и алгоритмах поиска.

Обычное дерево

В обычном дереве каждый узел может иметь любое количество потомков.

Пример:



Такие деревья удобно использовать для представления файловых систем, меню, организационных структур.

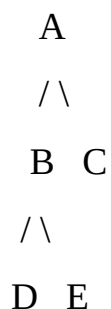
Бинарное дерево

Бинарное дерево — это дерево, в котором каждый узел имеет не более двух потомков.

Эти потомки обычно называются:

- левый потомок;
- правый потомок.

Пример:



Бинарные деревья широко применяются в алгоритмах поиска, сортировки, сжатия данных.

Бинарное дерево поиска

Бинарное дерево поиска — это бинарное дерево, в котором элементы расположены по специальному правилу:

- все значения в левом поддереве меньше значения узла;
- все значения в правом поддереве больше значения узла.

Пример:

```

      8
     /\
    3  10
   /\  \
  1  6  14

```

Если нужно найти число 6, сначала сравниваем его с 8. Так как 6 меньше 8, идём влево. Затем сравниваем с 3. Так как 6 больше 3, идём вправо. Так быстро находится нужный элемент.

Бинарное дерево поиска удобно тем, что при хорошей сбалансированности поиск выполняется быстрее, чем в обычном списке.

Система Дьюи для деревьев — это способ нумерации узлов по пути от корня.

- **Корень** обозначается пустым номером: ϵ или $\emptyset$.
- Его сыновья получают номера: 1, 2, 3, ...
- Сын узла с номером $a_1.a_2.\dots.a_k$ получает номер:

$a_1.a_2.\dots.a_k.i$

где i — его порядковый номер среди братьев.

Пример:

- 2 — второй сын корня;
- 2.3 — третий сын второго сына корня;
- 2.3.1 — первый сын узла 2.3.

То есть номер узла показывает путь от корня к этому узлу.

В задачах, в [] указывается сложность задачи. Оценки приведены в следующей таблице:

Оценка	Объяснение
00	Чрезвычайно легкое упражнение, на которое можно ответить сразу же, если понят материал текста, и которое почти всегда можно решить “в уме”.
10	Простая задача, которая заставляет задуматься над прочитанным материалом, но не представляет никаких особых трудностей. На решение такой задачи требуется не больше одной минуты; в процессе решения могут понадобиться ручка и бумага.
20	Средняя задача, которая позволяет проверить, насколько хорошо понят текст. На то чтобы дать исчерпывающий ответ, требуется примерно 15—20 минут.
30	Задача умеренной трудности и/или сложности, для удовлетворительного решения которой требуется больше двух часов.
40	Очень трудная или трудоемкая задача. Предполагается, что студент может решить такую задачу,
50	Исследовательская проблема. Если студент найдет решение этой задачи, то это решение следует опубликовать.

Интерполируя по этой “логарифмической” шкале, можно прикинуть, что означает любая промежуточная оценка. Например, оценка 17 говорит о том, что данное упражнение чуть легче, чем 20.

Буква М – задача с математическим уклоном.

ВМ - требует знания “высшей математики”.

ЗАДАЧИ

1. [18] Сколько существует различных деревьев с тремя узлами А, В, С?
2. [20] Сколько существует различных ориентированных деревьев с тремя узлами А, В, С?
3. [М20] Исходя из определения докажите, что для каждого узла Х в дереве

имеется единственный “путь вверх к корню”, т. е. единственная последовательность узлов $X_1, X_2, \dots, X_k, k \geq 1$ такая, что X_1 — корень дерева, $X_k = X$ и X_j — отец X_{j+1} для $1 \leq j < k$ (Указание: воспользуйтесь индукцией по числу узлов в дереве - Для этого сначала проверяется истинность утверждения с номером 1 — база (базис) индукции, а затем доказывается, что если верно утверждение с номером n , то верно и следующее утверждение с номером $n+1$ — шаг индукции, или индукционный переход.)

4. [07] Верно ли следующее утверждение: «Если на обычном чертеже дерева (корнем вверх), узел X имеет больший номер уровня, чем узел Y , то узел X находится на чертеже ниже, чем узел Y ?»

5. [02] Узел A имеет трех братьев, а узел B — его отец. Чему равна степень B ?

6. [21] Определите, что значит “ X есть t -й кузен Y , имеющий p -ю степень родства” как всегда имеющую смысл родственную связь между узлами X и Y дерева, по аналогии с генеалогическими деревьями (предполагается, что $m > 0$ и $p > 0$). (Значения этих терминов в применении к генеалогическим деревьям найдите в Internet.)

7. [03] Какое бинарное дерево не является деревом?

8. [00] Какой узел (B или A) является корнем в бинарных деревьях (1)?

9. [M20] Совокупность непустых множеств называется вложенной, если для любой пары множеств X, Y , либо $X \subset Y$, либо $Y \subset X$, либо X и Y не пересекаются. (Другими словами, $X \cap Y$ есть либо X или Y , либо $\emptyset$.) Как мы уже видели (см. рис. 7 (а) в лекции 2), всякому дереву отвечает некоторая совокупность вложенных множеств. Можно ли поставить в соответствие любой совокупности вложенных множеств некоторое дерево?

10. [M32] Перенесите определение дерева на бесконечные деревья, рассматривая совокупности вложенных множеств, как в упр. 10. Можно ли определить понятия “уровень”, “степень”, “отец”, “сын” так, чтобы они имели смысл для каждого узла бесконечного дерева? Приведите примеры вложенных множеств действительных чисел, соответствующих дереву, в котором

а) каждый узел имеет несчетную степень и имеется бесконечно много уровней;

б) имеются узлы с несчетным уровнем;

с) каждый узел имеет степень по меньшей мере 2 и множество уровней несчетно.

11. [10] Предположим, что узел X в десятичной системе Дьюи имеет номер

$a_1, a_2 > \dots, a_k$; каковы номера узлов на пути от X к корню (см. упр. 3)?

12. [20] Разработайте условные обозначения для бинарных деревьев, которые бы соответствовали десятичной системе обозначений Дьюи для деревьев.

13. (20) Начертите деревья, аналогичные изображенному на рис. 9 в лекции 2, соответствующие арифметическим выражениям

a) $2(a - b/c)$;

b) $a + b + 5c$

14. [01] Если T — дерево, изображенное на рис. 4 в лекции 2, то какой узел есть корень ($T[2, 2]$)?

15. [081] Что означает $L[5, 1, 1]$ в Списке (3)? Что означает $L[3, 1]$?

16. [75] Аналогично (7) изобразите Список $L = (a, (L))$. Что означает $L[2]$ в этом Списке? Что означает $L(2, 1, 1)$?

17. [M22] Сколько концевых узлов имеет дерево, обладающее n_1 узлами степени 1, n_2 узлами степени 2, ..., n_m узлами степени m ?

18. [05] В дереве корень имеет номер уровня 0. Узел X находится на уровне 4. Сколько узлов содержится в пути от корня до узла X , включая корень и сам узел X ?

19. [10] В системе Дьюи узел имеет номер 3.1.4.2.

a) Какой номер имеет его отец?

б) Какие номера имеют все узлы на пути от корня к этому узлу?

20. [12] Дан узел с номером Дьюи 2.5. Запишите номера его первых четырёх сыновей.

21. [15] В дереве узел A имеет степень 5. Один из его сыновей — узел B . Сколько братьев имеет узел B ?

22. [18] Нарисуйте дерево, соответствующее следующим номерам Дьюи:
1, 2, 3, 1.1, 1.2, 2.1, 2.1.1, 3.1
Укажите корень, листья и степени всех внутренних узлов.

23. [20] Докажите, что если узел X является предком узла Y , то номер Дьюи узла X является начальной частью номера Дьюи узла Y .

24. [20] Для дерева заданы степени внутренних узлов: один узел степени 3, два узла степени 2 и четыре узла степени 1. Сколько в таком дереве листьев?

25. [22] Постройте бинарное дерево для арифметического выражения $(a-b)-$

$$(c+d/e)$$

Укажите корень дерева и все концевые узлы.

26. [25] Предложите способ нумерации узлов бинарного дерева, аналогичный системе Дьюи, но учитывающий различие между левым и правым сыном. Пронумеруйте с его помощью дерево выражения $(a+b)-(c-d)$

27. [M30] Докажите, что в любом конечном дереве число рёбер на единицу меньше числа узлов. То есть если дерево содержит n узлов, то оно содержит $n-1$ ребро.

Таблица заданий лабораторной работы 2

Логин	Номера заданий									
114651	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
120703	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
128931	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
182231	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
200636	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
202141	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
219871	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
242632	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
257954	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
269037	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
275821	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
285846	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
289222	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
295885	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
296208	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
296868	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
299503	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
312755	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
319710	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
321014	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
331954	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
340919	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
341232	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
344561	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24

Решения оформляются как отчет о занятии традиционной структуры, т.е. титульный лист, задача решение. Отчет загружается для проверки на сайте vikchas.ru